ОРДЕНА ЛЕНИНА
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им. В. А. СТЕКЛОВА
ЛЕНИНГРАДСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ (ЛОМИ)

Ленинград, Д-11, Фонтанка, 25 Тел. 11-90-58

№ 662.I „23" ноября 1972 г.

ОТЗЫВ

о диссертации Л.А.ЛЕВИНА "Некоторые теоремы об алгорифмическом подходе к теории вероятностей и теории информации", представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

В диссертации Л.А.Левина разрабатывается алгорифмический подход к построению теории информации, основы которого были заложены А.Н.Колмогоровым.

В главе I развивается единообразный подход к описанию различного вида сложностей, родственных построенной А.Н.Колмогоровым. Этот подход позволил диссертанту с единой точки зрения сравнить сложности, ранее рассмотрение в литературе, и ввести новый тип сложности - логарифм априорной вероятности, - важная роль которого выясняется теоремами 2 и 3.

В главе II для изучения алгорифмических случайных процессов диссертант вводит специальный класс мер - полувычислимые меры. Ему удается показать существование максимальной (с точностью до мультипликативной константы) меры в этом классе - теорема I0.

Логарифм этой меры (который можно задать как сложность в рамках общей схемы главы I), как выясняется в теореме II, оказывается асимптотически близким к сложности разрешения. В последнем параграфе главы II на основе полученных результатов, диссертанту удается решить ряд проблем общей теории вероятностных машин (изучается число обращений к датчику случайных чисел, доказана невозможность получения

КЛ. ВНИГРИ Зак.№ 72 Тир. 5000

быстрорастущих последовательностей).

В главе III изучены некоторые вопросы алгорифмической теории информации. Отправляясь от введенного А.Н.Колмогоровым понятия количества информации, диссертант доказывает (независимо полученный им и А.Н.Колмогоровым) результат о "приближенной" коммутативности информации. В § 3 он, используя технику, развитую в предыдущих главах, решает проблему Дж.Т.Шварца, а именно- устанавливает совпадение энтропии произвольного стационарного случайного процесса с удельной сложностью почти всех его траекторий.

В целом диссертация Л.А.Левина представляет собой серьезное научное исследование, существенно развившее алгорифмический подход к теории вероятностей и теории информации. Диссертанту удалось преодолеть ряд принципиальных трудностей, имевшихся на пути развития этого подхода. Для решения стоявших перед ним задач, диссертант применил самые различные методы - от введения новых обобщающих схем до конкретных остроумных построений.

Результаты диссертации опубликованы еще в 1970 г. Автореферат правильно и полно отражает ее содержание.

Диссертация Л.А.Левина "Некоторые теоремы об алгорифмическом подходе к теории вероятностей и теории информации" удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а ее автор безусловно заслуживает присуждения ему степени кандидата физико-математических наук.

Старший научный сотрудник ЛОМИ
доктор физ.-мат.наук — Н. Шанин — (Н.А.Шанин)

Отзыв утверждаю:

Зам.директора МИАН СССР
доктор физ.-мат.наук — Г. Петрашень — (Г.И.Петрашень)

О Т З Ы В

о диссертации Л.А.Левина "Некоторые теоремы об алгоритмическом подходе к теории вероятностей и теории информации".

В последние годы под влиянием идей А.Н.Колмогорова как у нас, так и за рубежом получило довольно широкое развитие т.н. алгоритмическая теория информации. Эта теория наряду с стремлением к обоснованию классической теории информации и теории вероятностей породила и свои собственные проблемы и к настоящему моменту накопила здесь уже довольно много результатов и понятий, которые требуют дальнейшей систематизации, углубления, рассмотрения с единой точки зрения. Этой проблематики и посвящена диссертация Л.А.Левина.

Так например, одним из центральных понятий всей этой теории является понятие сложности конечного объекта. Но в различных приложениях наряду с введенным Колмогоровым понятием сложности $K(x)$ оказались удобными и другие разновидности сложностей, как, например, условная сложность, сложность разрешения и т.д.. Таким образом возникает вопрос об аксиоматическом определении сложности так, чтобы все известные типы сложностей получились как частные случаи и в то же время чтобы для этой аксиоматически введенной сложности сохранялись основные теоремы, полученные для частных сложностей. Этому вопросу посвящена первая глава диссертации. Здесь дается аксиоматическое определение типа сложностей - это множества функций (называемых V - мажорантами), которые удовлетворяют определенным аксиомам (таких аксиом всего пять и при методически более правильном изложении они не показались бы читателю столь искусственными). Оказывается (теорема I),

что этих аксиом (вообще говоря, довольно слабых) достаточно, чтобы в каждом типе сложностей гарантировать существование аддитивно наименьшей мажоранты (меры сложности), называемой потом универсальной . Затем доказывается (теорема 2), что среди всех типов сложностей имеется такой, который имеет наибольшую универсальную мажоранту $P(x)$ и эта $P(x)$ мало отличается от колмогоровской меры сложности $K(x)$ (теорема 3). В данной главе содержатся и некоторые другие результаты, в частности, теорема 7 о том, что сложность разрешения ограничена тогда и только тогда, когда ограничена условная сложность при заданной длине слова.
В целом результаты I - ой главы выявляют сущность и дают более глубокое представление о таком фундаментальном понятии, как сложность объекта.

Наиболее важные результаты диссертации начинаются со второй главы. Во второй главе изучаются меры, порождаемые произвольными эффективными операторами (названными в диссертации процессами) в пространстве Ω^* бесконечных и конечных двоичных последовательностей из равномерной меры пространства Ω (соответствующей бернуллиевскому датчику с вероятностью I/2 появления I и вероятностью I/2 появления 0). Такие меры диссертант называет полувычислимыми. Это название оправдывается теоремой 9, которая утверждает, что мера является полувычислимой тогда и только тогда, когда соответствующие вероятности представляют собой действительные числа, к которым мы можем эффективно приблизиться сколь угодно близко только с одной стороны (в отличие от вычислимой меры, где соответствующие вероятности представляют собой вычислимые действительные числа). Важной здесь является теорема IO о существовании универсальной полувычислимой меры, т.е. меры, которая с точностью до мультипликативной константы больше любой другой полувычислимой меры. В частности, это вытекает также и из того, что логарифм от полувычислимой меры является мерой сложности в смысле I - ой главы. Далее диссертанту удается обнаружить (теорема II), что между универсальной полувычислимой мерой $R\{\Gamma_x\}$ и сложностью по Колмогорову (точнее, сложностью разрешения $KR(x)$) существует самая тесная взаимосвязь:

$$|KR(x) - (-\log_2 R\{\Gamma_x\})| \leq 2\log_2 KR(x).$$

Доказательство этой теоремы связано с преодолением значительных трудностей. Из этой теоремы (и результатов I - ой главы) как непосредственное следствие получается известная теорема Леу - Мура - Шеннона - Шапиро о том, что вероятностные машины с положительной вероятностью не могут решать задач, неразрешимых детерминированными машинами, если эти задачи имеют единственное решение (следствие на стр.36). Полученные выше результаты используются и при установлении других нетривиальных фактов, касающихся вероятностных машин. Таким образом результаты данной главы говорят сами за себя.

В последней главе диссертации изучается алгоритмическое понятие количества информации и его связь с классическим понятием количества информации. Сначала доказывается приближенная коммутативность алгоритмического количества информации (теорема I6).

$$|I(x:y) - I(y:x)| \leq 12\log_2 K(\bar{x}y).$$

Эта теория доказана независимо диссертантом и А.Н.Колмогоровым.

Далее, А.Н.Колмогоровым была доказана связь между алгоритмическим и вероятностным определениями количества информации в случае независимых испытаний. В диссертации устанавливается аналогичная связь в существенно более общем случае - для произвольных эргодических стационарных процессов. Этот результат имеет ~~самое~~ непосредственное отношение к алгоритмическому обоснованию теории информации.

Таким образом полученные в диссертации результаты относятся к самым центральным вопросам алгоритмической теории информации и в настоящий момент занимают в этой теории заметное место. При оценке диссертации как немаловажный фактор мне хочется отметить еще то обилие свежих идей и подходов, которые содержатся в диссертации. Только местами чтение диссертации затрудняет чрезмерная сжатость изложения и некоторые небрежности в оформлении (так, например, в формулировке теоремы 2 участвует термин "самое "узкое" объемное ограничение", который нигде точно неопределен.

В целом диссертация Л.А.Левина удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям по математике и её автор Л.А.Левин безусловно заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук.

Основные результаты диссертации опубликованы, автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Официальный оппонент
кандидат физ.-мат.наук

Барздинь
Я.Барздинь

Подпись Барздинь
удостоверяю
Нач. канцелярии
ВЦ СО АН СССР
28/IV 1972 г.

О Т З Ы В

о кандидатской диссертации Л.А.Левина "Некоторые теоремы об алгоритмическом подходе и теории вероятностей и теории информации"

Подход, о котором идет речь в названии диссертации, был намечен А.Н.Колмогоровым на основе предложенного им понятия сложности кортежа. Это понятие, а также другие его варианты, сформулированные независимо А.А.Марковым и Р.Дж.Соломоновым, позволили создать теорию сложности алгоритмов, охватывающую наряду с основаниями теории вероятностей и теории информации также и многочисленные приложения к оценке сложности массовых проблем (А.А.Марков и его ученики, Я.М.Барздинь и др.).

После основополагающей работы А.Н.Колмогорова алгоритмический подход к теории вероятностей и теории информации получил существенное развитие в исследованиях шведского математика П.Мартин-Лефа (работавшего некоторое время в Москве), а также автора рецензируемой работы Л.А.Левина. К этому же направлению относятся и работы П.К.Шнорре (ФРГ).

В 1970 году в журнале "Успехи математических наук" появилась большая статья А.К.Звонкина и Л.А.Левина "Сложность конечных объектов и обоснование понятия информации и случайности с помощью теории алгоритмов", в которой обозреваются основные идеи и результаты, накопившиеся к тому времени в указанном направлении. Среди них видное место уже занимают результаты Л.А.Левина. Текст рецензируемой диссертации в значительной мере совпадает с теми разделами статьи, в которой изложены результаты автора, а именно: главы П и Ш воспроизводят почти дословно соответственно разделы 3 и 5 статьи. Глава I заново скомпонована лишь с частичным использованием материала раздела I статьи. Отдельные результаты, которые в статье только формулируются, излагаются в диссертации с полным доказательством (например, важная теорема I7). В диссертации используются термины, обозначения и даже рисунки статьи, на которую имеются многочисленные ссылки. Это не вызывает никаких неудобств за исключением тех случаев, когда в ссылки вкрались опечатки (например, на стр. 24 имеется ссылка на рис. 5, всего же в статье 4 рисунка!) Статья, а вместе с нею и диссертация, написана очень ясным языком, изложение очень корректно, тонкие места хорошо комментируются. Вообще благодаря тому, что основной текст диссертации уже готовился и редактировался ранее в рамках обзорной статьи, ему присущи приятные черты законченного и очень грамотного математического сочинения. По этой же причине, как нам представляется, отпадает необходимость в развернутом переизложении результатов диссертации и можно ограничиться лишь самым беглым их обзором по главам.

В первой главе анализируются различные варианты понятия "сложность кортежа". Показано, что они вписываются естественно в общие определения, предлагаемые автором (объемное ограничение, мажоранта и т.п.).

Через Ω и Ω^* обозначаются множества всех бесконечных двоичных последовательностей и множество всех двоичных последовательностей. В гл. П изучаются эффективные операторы из Ω в Ω^*

и вероятностные меры на Ω и Ω^*, Основное достижение диссертанта: определение понятия полувычислимой меры и доказательство теорем 8, 10 и 11, в которых выясняется природа этого понятия и его связь с вычислимой мерой и со сложностью. Результаты этой главы имеют существенное значение для развития алгоритмического подхода к основаниям теории вероятностей. Они используются в дальнейшем в главе III. Их сила продемонстрирована также тем, что в качестве сравнительного простого следствия из них получается известная теорема Шеннона, Леу и Шапиро о вычислениях на вероятностных автоматах.

В третьей главе доказываются два замечательных результата, а именно, теорема 16 о приближенной коммутативности алгоритмического количества информации и теорема 17 о связи между алгоритмическим и вероятностным определениями количества информации для произвольного эргодического стационарного процесса. Теорема 16 была получена независимо и А.Н.Колмогоровым; теорема 17 является далеко идущим обобщением факта ранее доказанного А.Н.Колмогоровым для независимых испытаний.

В целом диссертация Л.А.Левина богата результатами, производящими впечатление естественностью формулировок и тонкостью доказательств. Важным вкладом автора является также выработка удачных понятий, в терминах которых и стала возможной формулировка, а позднее и обоснование, соответствующих гипотез (это относится главным образом к главе I и II). Как известно, для молодой, развивающейся теории разработки удачной системы понятий имеет особое значение.

О хорошем качестве изложения материала уже говорилось выше.

Имеется, к сожалению, некоторое количество опечаток (стр. 22, 33, 39, 44, 47). Впрочем, как правило, они легко обнаруживаются и исправляются. Иногда они приводят к комичным эффектам (например, превращение "алгоритма" в "логарифм" в тексте, где часто по существу фигурируют оба понятия).

Считаю, что рецензируемая работа полностью удовлетворяет требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям по физико-математическим наукам, а ее автор, несомненно, заслуживает ученой степени кандидата физико-математических наук. Основные результаты опубликованы и автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Официальный оппонент
Д.ф.-м.н., профессор Б.А.Трахтенброт

Институт математики Сибирское отделение АН СССР

Подпись Трахтенброта
Удостоверяю
Зав. канцелярией
ИМ СО АН СССР
25/IV 1972 г.

Отзыв на кандидатскую диссертацию Л.А.Левина "Некоторые теоремы об алгоритмическом подходе к теории вероятностей и теории информации".

Имеется большая литература, посвященная различным вариантам понятия "сложности вычислений", т.е. сложности построения конструктивного объекта по его определению. Например, определение числа 9^{9^9} достаточно просто, но для получения этого числа в форме его десятичной записи нужны довольно длинные вычисления и вопрос об объеме этих вычислений не вполне тривиален. Поэтому в последние годы возникла теория "сложности определений". В основе ее более законченных вариантов лежит замечание Соломонова и Колмогорова (1964 и 1965), что возможно инвариантное с точностью до гораниченного статка определение сложности $K(x)$:

$$K(x) \leq K_A(x) + C_A ,$$

где $K_A(x)$ произвольная конкурирующая сложность.

Среди работ, посвященных сложности определений и ее применениям к основаниям теории вероятностей и теории информации работы Л.А.Левина уже заняли заметное место.

Удобно начать обозрение диссертации с последней (третьей) главы. В § 2 излагается теорема о приближенной коммутативности "алгоритмической меры информации", полученная почти одновременно независимо Л.А.Левиным и А.Н.Колмогоровым. По определению А.Н.Колмогорова "количеством информации в объекте y относительно объекта x" называется разность

$$J(y:x) = K(x) - K(x(y)) ,$$

где $K(x(y))$ условная сложность объекта x при заданном объекте y. Простые примеры показывают, что так определенное количество информации может быть лишь приближенно коммутативным: разность

$$\mathcal{J}(y:x) - \mathcal{J}(x:y) \qquad \text{(I)}$$

может иметь порядок логарифма сложности объектов x и y. Было бы существенно установить, что порядок этой разности не может быть еще большим. Это и утверждает теорема I6 диссертации.

При сравнении алгоритмического определения количества информации с вероятностным надо иметь в виду, что любое утверждение вероятностного характера имеет смысл предсказания результата возможных массовых экспериментов. Например, точная коммутативность вероятностного количества информации

$$\mathcal{J}_B(\xi:\eta) = \mathcal{J}_B(\eta:\xi),$$

где ξ и η случайные объекты, реально применима лишь к сопоставлению двух длинных рядов

$$x^n = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$y^n = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

результатов испытаний. Приближенный характер коммутативности алгоритмического количества информации не мешает тому, что в случае независимых испытаний при $n \to \infty$ с вероятностью единица

$$\frac{\mathcal{J}(y^n : x^n)}{n} \to \mathcal{J}_B(\eta:\xi).$$

Если условие V тривиально, то получаем в виде частного случая соотношение между энтропией $H(\xi)$ вероятностного распределения и сложностью начального отрезка последовательности исходов независимых испытаний:

$$\frac{K(x^n)}{n} \to H(\xi). \qquad (2)$$

Теорема I7 Л.А.Левина дает весьма далекое обобщение соотношения (2) на произвольные стационарные вероятностные процессы. В случае процесса с конечным числом состояний и эргодического утверждение этой теоремы выражается той же формулой (2). Эта теорема Л.А.Левина представляется мне имеющей большое значение.

В первой главе рассматриваются различные варианты определения "сложности" слова

$$X^n = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

в каком-либо алфавите: Колмогоровская сложность – $K(x^n)$, условная сложность $K(x^n(n))$ при заданной длине слова n, "сложность разрешения" $KR(x^n)$ А.А.Маркова и Д.Ловеленда и т.д. Дается общее определение класса сложностей $K_v(x^n)$. Все вводимые сложности отличаются, впрочем, от $K(x^n)$ не более, чем на $C \log_2 n$. Среди сложностей $K_v(x^n)$ имеется максимальная $P(x^n)$. Для нее

$$K(x^n) \leqslant P(x^n) \leqslant K(x^n) + 2 \log_2 K(x^n).$$

По самому определению сложности разрешения ясно, что ограниченность сложностей $KR(x^n)$ для конечных отрезков бесконечной последовательности X необходима и достаточна для вычислимости этой последовательности. Теорема 7 (доказанная независимо и другими авторами) показывает, что таким же необходимым и достаточным условием вычислимости последовательности является ограниченность условных сложностей $K(x^n(n))$. Для Колмогоровской сложности $K(x)$ аналогичное утверждение было бы ошибочно.

Анализ свойств различных вариантов понятия "сложность определения" и их взаимоотношений, проведенный в первой главе диссертации, представляется мне весьма своевременным.

Вторая глава занимает в диссертации центральное место. Она посвящена "алгоритмическим процессам" переработки последовательностей в последовательности (конечные или бесконечные) и вероятностным мерам на пространстве Ω бесконечных двоичных последовательностей и на пространстве Ω^* всех двоичных последовательностей (конечных и бесконечных).

Примыкая к Мартин-Лефу, диссертант рассматривает "вычислимые" меры на Ω и отображающие их друг на друга "регулярные" процессы. Однако, желание включить процессы $\mathcal{F}(x)$ в "универсальный процесс" $H(i,x)$ приводит к рассмотрению процессов, которые отображают вычислимые меры в Ω лишь на "полувычислимые" и при том в пространстве Ω^*. Среди полувычислимых мер имеется "универсальная" в следующем смысле: для любой полувычислимой меры Q имеется такая константа C, что

$$Q(\Gamma_x) \leqslant C R(\Gamma_x),$$

где R - универсальная мера, а Γ_x - множество последовательностей с началом x.

Теорема II устанавливает тесную связь логарифма вероятности $R(\Gamma_x)$ с сложностью разрешения $KR(x)$:

$$\left|KR(x)-(-\log R(\Gamma_x))\right| \leqslant 2 \log_2 KR(x).$$

В примечании на стр. I0, что сложность $P(x)$ находится в аналогичном отношении к "наибольшему (с точностью до константы) полувычислимому распределению вероятностей на множестве натуральных чисел". Это замечание не получило более обстоятельного развития в диссертации.

Результаты второй главы представляют существенный интерес при развитии алгоритмического подхода к основаниям теории вероятностей, разрабатывавшегося Мартин-Лефом и Шнорром. Выше уже говорилось о теореме I7, устанавливающей связь между алгоритмической сложностью отрезков стационарного процесса и его энтропией. При доказательстве этой теоремы использованы результаты второй главы. Применениям к исследованию возможностей "вероятностных машин" посвящен § 4 второй главы. Диссертант рассматривает теорему I7 и § 4 второй главы лишь как примеры возможных применений (см. автореферат). И действительно, важность для теории вероятностей построенной в диссертации универсальной полувычислимой меры еще должна быть продемонстрирована более широким образом. Однако, мне представляется, что уже по своей внутренней законченности и убедительности концепции второй главы заслуживают всяческого внимания.

В целом я считаю работу Л.А.Левина вполне заслуживающей присуждения за нее ученой степени кандидата физико-математических наук.

25 января 1972 года

АКолм

/А.Н.Колмогоров/

Х А Р А К Т Е Р И С Т И К А

на студента У курса механико-математического факультета
Московского государственного университета

ЛЕВИНА Леонида Анатольевича, рождения 1948 года, ~~члена~~
члена ВЛКСМ.

Левин Л.А. зачислен на факультет в 1966 году. За время учебы имел хорошую успеваемость. По математическим дисциплинам в основном была отличная успеваемость. Л.А.Левин проявил большие способности к научной работе. Его научные результаты печатались в ДАН СССР, докладывались на Московском математическом обществе, на математическом конгрессе в Италии, на семинаре математического института АН СССР. Журнал "Успехи математических наук" принял к печати его обзорную статью по основаниям теории вероятности и теории информации. С 3 курса Л.А.Левин руководил специальным семинаром кафедры математической логики.

Левин Л.А. активно участвовал в общественной жизни факультета: он неоднократно избирался в состав комсомольского бюро потока, редактировал литературное приложение к факультетской газете, много работал со школьниками. За работу со школьниками имеет грамоты Смоленского обкома комсомола и благодарности вузкома МГУ. Однако надо отметить, что на 5 курсе Левин Л.А. допустил ошибку выступив против рекомендации партийного бюро. Левин Л.А. отзывчив, общителен, пользуется авторитетом среди своих сокурсников.

Характеристика дана для представления на работу.

Д е к а н
механико-математического факультета МГУ
профессор (П.М.Огибалов)

Секретарь комитета ВЛКСМ
факультета (В.Демидович)

"____"_________ 1970 г.

Научная характеристика.

Л.ЛЕВИН принадлежит к числу наиболее способных и выделившихся научными достижениями советских математиков своего поколения. По окончании Московского Университета он сдал экстерном кандидатский минимум, а его опубликованные результаты с большим избытком достаточны, чтобы быть защищенными в качестве кандидатской диссертации.

Ряд его результатов относится к интенсивно развивающейся "алгоритмической теории информации". Им была доказана фундаментальная теорема о "почти симметричности" /с точностью до логарифмического добавка киличества информации в "сообщении" x о содержании сообщения y и получено в этой области много важных результатов, которые было бы трудиее охарактеризовать в кратком отзыве.

Замечательное развитие в работах Л.Левина получили исследования Мартин-Лефа об алгоритмически случайных бесконечных последовательностях и универсальных тестах.

Весьма значительными мне представляются находящиеся в печати результаты Л.Левина, проливающие совершенно новый свет на волнующую всех специалистов проблему "существования проблем, неразрешимых без перебора".

Л.Левин является широко образованным математиком, особенно в области теории вероятностей, теории информации и математической логики. В своих работах он проявил совершенно незаурядные способности к тонкому логическому анализу и изобретательность в нахождении неожиданных путей к решению поставленной задачи. Я думаю, что эти его способности дают основание считать, что он может быть весьма полезен в работах по теории автоматов, теории передачи информации, теории вероятностей и более прикладного направления.

24 мая 1973 г.

Академик А.Колмогоров

/А.Н.Колмогоров/

Подпись А.Н. Колмогорова удостоверяю 1/XII-77

Секр. каф. Математ. статистики мех-мата ф-та МГУ М.Козлов

Копия.

Научная характеристика

Л.Левин принадлежит к числу наиболее способных и выделившихся научными достижениями советских математиков своего поколения. По окончании Московского Университета он сдал экстерном кандидатский минимум, а его опубликованные результаты с большим избытком достаточны, чтобы быть защищенными в качестве кандидатской диссертации.

Ряд его результатов относится к интенсивно развивающейся "алгоритмической теории информации". Им была доказана фундаментальная теорема о "почти симметричности" (с точностью до логарифмического добавка количества информации в "сообщении" x о содержании сообщения y и получено в этой области много важных результатов, которые было бы труднее охарактеризовать в кратком отзыве.

Замечательное развитие в работах Л.Левина получили исследования Мартин-Лефа об алгоритмически случайных бесконечных последовательностях и универсальных тестах.

Весьма значительными мне представляются находящиеся в печати результаты Л.Левина, проливающие совершенно новый свет на волнующую всех специалистов проблему "существования проблем, неразрешимых без перебора".

Л.Левин является широко образованным математиком, особенно в области теории вероятностей, теории информации и математической логики. В своих работах он проявил совершенно незаурядные способности к тонкому логическому анализу и изобретательность в нахождении неожиданных путей к решению поставленной задачи. Я думаю, что эти его способности дают основание считать, что он может быть весьма полезен в работах по теории автоматов, теории передачи информации, теории вероятностей и более прикладного направления.

24 мая 1973 г.

Академик подпись А.Н.Колмогоров

Подпись А.Н.Колмогорова удостоверяю I.XП.77г.
Ученый секр.каф. математ.статистики
мех.мат.ф-та МГУ подпись
печать учреждения,выдавшего документ.

6 декабря 1977года. Я, Клигман Александр Викторович,старший государственный нотариус Третьей Московской государственной нотариальной конторы, свидетельствую верность этой копии с подлинником документа,в последнем подчисток,приписок,зачеркнуты слов и иных неоговоренных исправлений или каких-либо особенностей не оказалось.

Зарегистрировано в реестре за № 3-21720
Взыскано государственной пошлины 20 копеек.

Старший государственный
нотариус

Translated from Russian

Copy

ACADEMIC RECOMENDATION

L. LEVIN is one of the most talented Soviet mathematicians of his generation; his scholarly achievments are outstanding. He received his degree from Moscow University, then passed the exams for the Candidate's degree. His published works are for more than sufficient for the fulfillment of the requirements of the Candidate's dissertation.

Much of his work is in the rapidly developing field of algorythmic information theory. He proved a fundamental theorem on the "near-symmetry" (to within a quantity equal to its lagorythm) of the function "quantity of information in statement X about the content of statement Y", and obtained many important results in this area which it would be difficult to describe in a short summary.

L.Levin brilliantly followed up Martin-Löf's research on algorythmically random infinite acquences and universal tests,

L.Levin has published extremely significant work casting a completelt new light on the question of the existance of problems which are insoluble without trying all potential solutions, a question which is of concern to all mathematicians working in the field.

L.Levin has a broad mathematical education, especially in the area of probability theory, information theory and mathematical logic. His work reveals a truly outstanding capability for precise logical analysis, and ingenuity in finding unexpected ways of solving problems.

I believe that on the basis of these capabilities it can be expected that he will be extremely useful in work on the theory of automats, information transmission theory, probability theory and in work of a more practical nature.

May 24, 1973.

Academician - signed - A.N.Kolmogorov

Authenticity of the signature
of Mr. A.N.Kolmogorov is hereby certified.

Scientific secretary of the chair of
mathematical statistics of the mechanical
& mathematical faculty of the Moscow State
University - signed

p.t.o.

1.XII.1977

Seal.

6th December, 1977

I, Kligman Alexandr Victorovich, Chief State Notary to the Third Moscow State Notary Office, do hereby certify that the above copy fully conforms to its original, there being neither erasures, nor postscripts, nor crossed out words, nor any other unspecified irregularities in the later found.

Duty-paid 20 cop.

Reg. No. 3-21420

Chief State Notary - signed

Seal: Ministry of Justice of the RSFSR
The First State Notary Office
Moscow

Перевела Л.Н.Брикер

Город Москва, одиннадцатого февраля тысяча девятьсот семьдесят восьмого года.

Я, Зимина Р.И., заместитель старшего государственного нотариуса Первой Московской государственной нотариальной конторы, свидетельствую подлинность подписи, сделанной известным мне переводчиком Брикер Любовью Нисоновной.

Зарегистрировано в реестре за № 24з-1141

Взыскано государственной пошлины 30 коп.

Заместитель старшего
государственного нотариуса Р.Зимина