

## L'incomplétude, le hasard et la physique

Le logicien Leonid Levin vient de démontrer un résultat qui renforce le théorème d'incomplétude de Gödel ; il en tire la conclusion qu'aucun procédé physique ne peut contourner le fameux résultat de 1930.

**P**lus de 75 ans après sa découverte en 1930, le théorème d'incomplétude de Kurt Gödel (toute théorie formelle non contradictoire des mathématiques contient des propositions indécidables, c'est-à-dire dont on ne pourra démontrer ni qu'elles sont justes ni qu'elles sont fausses) suscite encore des interrogations et fait l'objet de compléments.

De remarquables résultats viennent d'être obtenus par Leonid Levin, chercheur d'origine ukrainienne maintenant professeur à l'Université de Boston (ce logicien est célèbre pour avoir formulé en 1971, en même temps que Stephen Cook, la plus célèbre conjecture de l'informatique théorique,  $P \neq NP$ ). Les théorèmes de L. Levin renforcent la portée du résultat de Gödel et suggèrent que certaines informations propres au monde mathématique ne peuvent être extraites du monde physique.

La généralisation qui vient d'être démontrée s'appuie sur la théorie algorithmique de l'information d'Andrei Kolmogorov (dont L. Levin fut un élève) ; elle confirme que les pistes envisagées pour s'affranchir du théorème d'incomplétude à l'aide de mécanismes physiques produisant un véritable « hasard » (la mécanique quantique suggère qu'il en existe) n'aboutiront jamais.

Cette nouvelle version conduit L. Levin à une conjecture étonnante sur les rapports entre le monde physique et le monde mathématique : une loi de conservation de l'information s'ajouterait aux lois de conservation déjà postulées en physique. Grâce à L. Levin, plus personne ne peut nier que l'incomplétude logique nous apprend quelque chose d'important sur la nature des mathématiques et qu'elle fait partie des lois fondamentales de l'univers. Sa portée concernerait non seulement le monde abstrait du calcul et des mathématiques, mais aussi celui de la physique dans sa totalité.

Pour examiner l'apport récent et inattendu de L. Levin, revenons au fameux théorème que Gödel proposa à la communauté mathématique éberluée.

Souvenons-nous que les mathématiques reposent sur des systèmes d'axiomes dont les combinaisons, associées à des règles de déduction, donnent tous les théorèmes. Pour faciliter notre exposé, nous nous référons principalement au système formel (voir une définition page ci-contre) de

l'arithmétique de Peano, noté  $\mathcal{PA}$ , mais tout ce que nous envisagerons s'applique aussi au système formel de la théorie des ensembles et à tout système formel qui permet de démontrer des résultats mathématiques intéressants.

Le système d'axiomes  $\mathcal{PA}$  de Peano est un ensemble de conventions permettant d'écrire des formules et des démonstrations mathématiques concernant les nombres entiers. En utilisant ce système, nous pouvons écrire et démontrer une formule qui signifie que «  $30 = 2 \times 3 \times 5$  » ou que « 40 est la somme de deux carrés » (36 et 4). Nous pouvons aussi écrire et démontrer des formules signifiant « Le carré d'un multiple de 3 est toujours un multiple de 9 » ou « Il existe une infinité de nombres premiers ». Nous pouvons aussi écrire des énoncés au sujet d'un programme (par exemple écrit en langage C ou JAVA) et affirmer que ce programme calcule successivement toutes les décimales de  $\pi$ . Mieux, nous pouvons écrire et démontrer des énoncés qui traitent de  $\mathcal{PA}$  lui-même, par exemple : «  $\mathcal{PA}$  démontre que  $30 = 2 \times 3 \times 5$ . »

Parmi les axiomes de  $\mathcal{PA}$ , certains concernent les opérations arithmétiques (du type  $x + 0 = x$ ) et autorisent le raisonnement par récurrence : si « 0 vérifie la propriété A » et si « n vérifie A implique que n + 1 aussi », alors « tout entier vérifie A ». Les raisonnements utilisés par les mathématiciens pour démontrer des propriétés concernant les nombres entiers s'y expriment sans trop de mal et, à vrai dire, de nombreux mathématiciens pensaient (avant Gödel) que tout énoncé vrai concernant les nombres entiers pouvait être démontré en suivant les règles de  $\mathcal{PA}$ .

On dit que  $\mathcal{PA}$  est un système formel pour l'arithmétique car, quand on l'utilise, les raisonnements sur les entiers se ramènent à des manipulations formelles, c'est-à-dire à des manipulations de symboles obéissant à des règles intangibles. Vérifier qu'une démonstration écrite dans  $\mathcal{PA}$  est correcte ne demande aucune intelligence et peut être fait mécaniquement. Ainsi, le contrôle des démonstrations est, pour tout système formel digne de ce nom, une opération mécanisable que l'on peut donc confier à un programme, et lorsque les mathématiciens prennent la peine d'écrire leurs démonstrations dans les notations de  $\mathcal{PA}$ , aucune contestation n'est possible.

On admet que  $\mathcal{PA}$  est non contradictoire, c'est-à-dire qu'on ne peut pas, en l'utilisant, établir que deux propriétés

## 1. Carnap, Gödel et Levin



« Le 26 août 1930, de nombreux membres du cercle de Vienne se rencontrent au Café Reichsrat (b) pour discuter des derniers détails du voyage qu'ils ont prévu à Königsberg. Dans la ville d'Emmanuel Kant doit se tenir le Deuxième congrès sur la théorie de la connaissance des sciences exactes. [...] Lors d'une pause pendant les préparatifs, Gödel (c) s'entretient avec Carnap (a) sur sa découverte de l'incomplétude ; trois jours plus tard, ils poursuivent leur conversation dans le même café.

Toutefois, Carnap ne saisit pas tout de suite la portée du résultat de Gödel et présente encore, dans sa conférence du 5 septembre, la démonstration de la non-contradiction comme un critère nécessaire de validité des théories axiomatiques. Le jour même, Gödel expose sa démonstration du théorème d'incomplétude, mais passe inaperçu après les conférences longues et ardues de Hans Reichenbach, Werner Heisenberg et Otto Neugebauer.

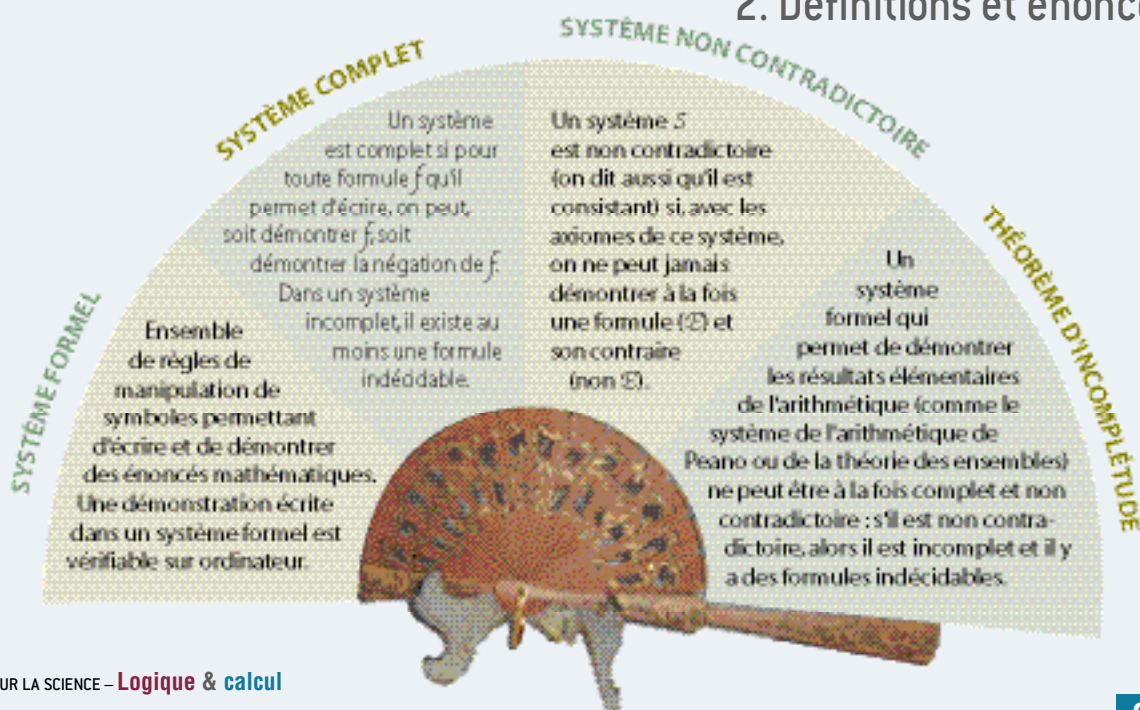
Le 7 septembre, lors d'une session de discussion sur les conférences passées, Gödel énonce à nouveau son théorème, en réponse à une intention de von Neumann : « On peut même (sous réserve de la non-contradiction des mathématiques classiques) donner des exemples

de théorèmes qui, bien que sémantiquement exacts, sont indémontrables dans le système formel des mathématiques classiques. » Peine perdue, l'annonce du théorème d'incomplétude est noyée dans l'activité générale. Dans le compte rendu, le nom de Gödel n'apparaît même pas. » (Extrait de *Gödel*, de G. Guerriero, *Génie de la Science*, n° 20.)

Le théorème d'incomplétude de Gödel passa dans un premier temps inaperçu : sans doute dérangeait-il trop. Cependant, petit à petit, il fut reconnu comme un résultat central en logique et même en mathématiques. L'étude et le développement de ses conséquences en philosophie des mathématiques, en logique et, bien au-delà, en science, ne semblent pas terminés.

Leonid Levin (d) vient d'en formuler une généralisation qui concerne la physique elle-même : l'impossibilité de disposer d'un système complet d'axiomes pour l'arithmétique, ou les mathématiques classiques, persiste même lorsque l'on accepte, pour construire de nouveaux axiomes, d'utiliser des algorithmes probabilistes ou des processus qui ne créent pas d'information sur le problème de l'arrêt, ce qui est vraisemblablement le cas de la totalité des processus naturels.

## 2. Définitions et énoncés

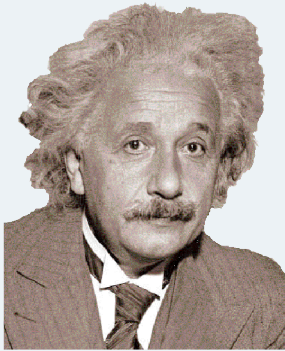
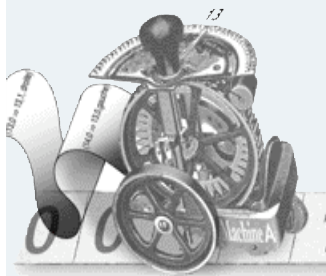


### 3. Incomplétudes

D'après le théorème de Gödel, un système formel, par exemple l'arithmétique de Peano, comporte des propositions indécidables. Peut-on le compléter en lui ajoutant des axiomes – éventuellement une infinité – de façon à obtenir un système complet (dépourvu d'indécidables) et non contradictoire ? Si on détermine les nouveaux axiomes par un procédé mécanique – par la complétion algorithmique –, le théorème de Gödel lui-même donne la réponse : non, ce que l'on obtiendra, si c'est un système non contradictoire, sera encore incomplet.

En revanche, il semblait envisageable d'ajouter des axiomes par un procédé aléatoire (combinaison de calculs et de tirages au sort), le procédé conduisant à l'infini à un système non contradictoire et complet. Étendant le résultat de Gödel, Leonid Levin a démontré que cette piste n'aboutit pas. L'incomplétude – on devrait peut-être dire « l'incomplétabilité » – est encore plus grave que ce que le théorème de Gödel de 1930 énonçait.

Les résultats de L. Levin généralisent encore cela et on peut les interpréter en affirmant qu'aucun procédé physique utilisé pour ajouter des axiomes ne peut compléter  $\mathcal{PA}$  (ou tout système intéressant). L'idée, poussée à son extrême, suggère qu'aucune méthode, y compris celles incluant des humains, même aussi intelligents qu'Albert Einstein, n'avancera dans la direction d'une complétion progressive (telle que le suggérait Gödel, qui défendait qu'une partie essentielle du travail des mathématiciens serait de trouver de nouveaux axiomes).



se contredisent comme « 137 est un nombre premier » et « 137 est un nombre composé ». On a de bonnes raisons de croire que  $\mathcal{PA}$  n'est pas contradictoire, la principale étant qu'on n'a jamais rencontré de contradiction en l'utilisant. Nous verrons qu'il est illusoire de vouloir le démontrer.

Le premier théorème d'incomplétude de Gödel appliqué à  $\mathcal{PA}$  indique qu'il existe une formule  $\mathcal{F}$ , concernant les entiers et exprimable dans le symbolisme de  $\mathcal{PA}$ , qu'on ne pourra pas démontrer avec  $\mathcal{PA}$ , et qui sera telle qu'on ne pourra pas non plus établir « non  $\mathcal{F}$  » (l'affirmation que  $\mathcal{F}$  est fausse). Un tel énoncé échappe à  $\mathcal{PA}$  avec lequel on ne peut démontrer que  $\mathcal{F}$  est vraie, ni démontrer que  $\mathcal{F}$  est fausse : il y a, en quelque sorte, un trou dans  $\mathcal{PA}$ . Une telle formule  $\mathcal{F}$  est dénommée indécidable de  $\mathcal{PA}$  et c'est à cause d'elle que  $\mathcal{PA}$  est incomplet.

La démonstration de Gödel qui prouve l'existence d'indécidables repose sur la mise au point d'une formule  $\mathcal{G}$  analogue au paradoxe d'Épiménides le Crétois (lequel affirme « Je mens »). Cette formule  $\mathcal{G}$  énonce : «  $\mathcal{G}$  n'est pas démontrable dans  $\mathcal{PA}$  » (si  $\mathcal{G}$  était démontrable, alors  $\mathcal{G}$  serait vraie, car  $\mathcal{PA}$  ne démontre que des choses vraies, et donc  $\mathcal{G}$  ne serait pas démontrable !). Le raisonnement de Gödel ne s'applique pas seulement à  $\mathcal{PA}$ , mais à tout système formel assez puissant, et il s'y applique de manière

constructive : si vous disposez d'un système formel  $S$ , la démonstration de Gödel vous donne de manière explicite et mécanique une formule  $\mathcal{F}$ , indécidable dans  $S$ .

L'énoncé affirmant que «  $\mathcal{PA}$  n'est pas contradictoire » est un énoncé désigné par  $\mathcal{NC}(\mathcal{PA})$  que l'on peut exprimer dans  $\mathcal{PA}$ . Le second théorème d'incomplétude de Gödel nous dit que si  $\mathcal{PA}$  n'est pas contradictoire alors  $\mathcal{NC}(\mathcal{PA})$  est justement l'un des indécidables de  $\mathcal{PA}$ . C'est pourquoi démontrer la non-contradiction de  $\mathcal{PA}$  est illusoire :  $\mathcal{PA}$  ne pouvant le faire, des systèmes plus élémentaires que  $\mathcal{PA}$  ne peuvent pas le faire non plus, et donc seuls des systèmes plus puissants peuvent y parvenir, ce qui semble inutile : la preuve de non-contradiction obtenue n'aura de sens que si le système plus puissant utilisé est lui-même non contradictoire, ce qui sera encore plus difficile à prouver et nécessitera un système encore plus puissant !

### Suffirait-il d'ériger les indécidables en axiomes ?

Une idée vient naturellement à l'esprit : pour contourner l'incomplétude de  $\mathcal{PA}$ , et faire que  $\mathcal{PA}$  soit complet, pourquoi ne pas ajouter l'indécidable  $\mathcal{F}$  (ou sa négation) aux axiomes de  $\mathcal{PA}$  ? Une fois  $\mathcal{F}$  ajouté, il devient décidable car, en tant qu'axiome, il est instantanément démontré : le trou serait-il bouché ?

Ce serait trop simple ! Si l'on ajoute  $\mathcal{F}$  aux axiomes de  $\mathcal{PA}$ , on obtient un nouveau système formel  $\mathcal{PA}'$  (qui n'est plus  $\mathcal{PA}$  puisque l'ensemble des axiomes a changé). La démonstration de Gödel s'applique à  $\mathcal{PA}'$  qui est donc incomplet lui aussi, et elle fournit un énoncé indécidable  $\mathcal{F}'$  dans  $\mathcal{PA}'$ . Ajouter  $\mathcal{F}'$  aux axiomes de  $\mathcal{PA}'$  ne ferait que repousser le problème et conduire à un système  $\mathcal{PA}''$  qui posséderait encore un indécidable  $\mathcal{F}''$ , etc.

Cette impossibilité de compléter  $\mathcal{PA}$  en lui ajoutant des axiomes n'est cependant pas absolue. Croire en un tel absolu, remarque L. Levin, conduit à des interprétations fausses des théorèmes d'incomplétude, par exemple celle affirmant que la vérité mathématique est incomplète, alors que ce sont nos moyens formels d'y accéder qui sont inadéquats.

Comme L. Levin le rappelle, dans l'abstrait, si on considère toutes les façons possibles d'ajouter des axiomes – en quantité finie ou infinie –, il y en a qui donnent des « systèmes » non contradictoires et complets. Ainsi, pour toute formule  $\mathcal{L}$ , on pourra démontrer  $\mathcal{L}$ , ou démontrer *non*  $\mathcal{L}$ , avec les axiomes. Le mot « systèmes » dans la phrase précédente est mis entre guillemets car ces systèmes d'axiomes complets ne sont pas de vrais systèmes formels : il est certes possible d'ajouter dans l'abstrait des axiomes jusqu'à en gaver le système pour qu'on ne trouve plus aucun indécidable, mais dans ce cas on perd la vérifiabilité mécanique des preuves du système obtenu (si ce n'était pas le cas, on aurait un système qui contredirait le théorème de Gödel).

Illustrons cette idée, essentielle pour comprendre le travail de L. Levin. Une méthode de complétion envisageable dans l'abstrait consiste à numéroter toutes les formules que l'on obtient en utilisant  $\mathcal{PA}$  :  $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n, \dots$  Puis on procède de la manière suivante :

– si  $\mathcal{F}_0$  est un indécidable de  $\mathcal{PA}$ , on ajoute  $\mathcal{F}_0$  aux axiomes,

## 4. Hasards

cela donne  $\mathcal{PA}_1$  ; sinon  $\mathcal{PA}_1 = \mathcal{PA}$  (on ne change pas  $\mathcal{PA}$ ) ;  
– si  $\mathcal{F}_1$  est un indécidable de  $\mathcal{PA}_1$ , on ajoute  $\mathcal{F}_1$  aux axiomes de  $\mathcal{PA}_1$  ; cela donne  $\mathcal{PA}_2$  ; sinon, on ne change rien  $\mathcal{PA}_2 = \mathcal{PA}_1$ , etc.

Cette opération infinie de complétion donne un système non contradictoire complet  $\mathcal{PA}_{\text{infini}}$ . Le problème est qu'avec cette méthode, le « système » obtenu n'est plus vraiment un système formel. En effet, pour contrôler qu'une démonstration est correcte, il faut pouvoir tester si une formule donnée  $\mathcal{F}$  est un axiome de  $\mathcal{PA}_{\text{infini}}$ . Or la méthode utilisée pour construire  $\mathcal{PA}_{\text{infini}}$  ne fournit pas de procédé mécanique de test déterminant cela (savoir si une formule est indécidable n'est pas algorithmiquement testable).

L. Levin à la suite d'autres logiciens remarque que parmi les procédés abstraits, certains ne sont pas physiquement absurdes et permettent parfois de construire des objets intéressants non calculables par algorithme. On peut, par exemple en lançant une pièce de monnaie ou en observant le résultat d'une désintégration radioactive, entreprendre la construction d'une suite infinie de 0 et de 1 qui ne sera pas calculable par algorithme. Le hasard véritable, fondement de la mécanique quantique, est donc, dans certains cas, en mesure de construire des objets non calculables. La question se pose alors : ne pourrait-on pas, à l'aide d'un procédé mêlant des calculs et des tirages au hasard (comme décider si un indécidable est choisi comme axiome, dans son acception vraie ou fautive par tirage au sort), construire un système non contradictoire complétant l'arithmétique de Peano  $\mathcal{PA}$  ?

David Hilbert qui, semble-t-il, n'a jamais accepté l'incomplétude de  $\mathcal{PA}$  pensait-il à cela ? Nous l'ignorons, mais la question méritait d'être posée... et résolue.

Le système obtenu à l'infini ne serait pas un véritable système formel (il ne permettrait pas une vérification mécanique des démonstrations, sinon il contredirait le théorème de Gödel), mais serait un système complet ayant une infinité d'axiomes résultant d'une méthode physiquement acceptable. On aurait surmonté l'incomplétude par un procédé raisonnable fondé sur le hasard. Si cette complétion par « algorithme probabiliste » était possible, nous pourrions nous approcher autant que nous le souhaitons d'un système dépourvu de trou, contournant ainsi l'incomplétude de Gödel, qui ne serait donc plus une fatalité.

Généralisant des résultats plus anciens concernant les algorithmes probabilistes, les théorèmes nouveaux de L. Levin prouvent en particulier que ce rêve est lui aussi inaccessible.

### L'information sur le problème de l'arrêt

Quelle a été la méthode de L. Levin pour obtenir cette généralisation puissante et inespérée du théorème d'incomplétude ? La méthode a consisté à démontrer deux types de résultats par ailleurs intéressants en eux-mêmes.

Tout d'abord, L. Levin a étendu la théorie de l'information pour qu'elle sache envisager des suites infinies et il a défini un « contenu commun d'information » entre deux suites infinies. Il a aussi démontré des résultats de conserva-

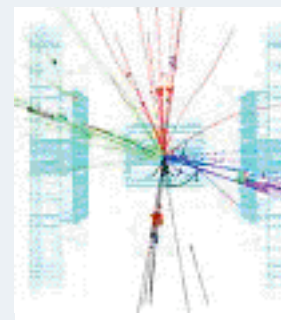
Les méthodes de calcul par algorithme ne permettant pas de compléter le système  $\mathcal{PA}$ , on peut envisager d'utiliser le hasard pour choisir les axiomes qui « complèteraient » le système de Peano. La question est : quel hasard ?

Non pas ce que nous appelons ordinairement hasard, lequel ne traduit, en physique classique, que notre incapacité à tenir compte des plus fines influences dans l'analyse du comportement des systèmes. Quand nous lançons une pièce en l'air, il n'y a pas de hasard vrai : les équations du mouvement sont connues et, si l'on sait mesurer avec suffisamment de précision les conditions initiales, le côté où tombe la pièce est déterminé sans ambiguïté.

En mécanique quantique, le hasard est intrinsèque : c'est le cas dans une désintégration radioactive par exemple. La radioactivité, terme inventé vers 1898 par Marie Curie, est un phénomène physique naturel au cours duquel des noyaux atomiques instables se désintègrent en dégageant de l'énergie sous forme de rayonnements divers, pour se transmuter en des noyaux atomiques plus stables. Selon la mécanique quantique, il est théoriquement impossible de prévoir le moment où un atome va se désintégrer.

Le hasard quantique est radicalement différent du hasard ordinaire : il s'agit d'un « vrai » hasard, un hasard intrinsèque, qui persiste quelle que soit la précision des mesures. Erwin Schrödinger le dira poétiquement : « La durée de vie d'un atome radioactif est encore moins prévisible que celle d'un moineau en bonne santé. » Notons que cette notion de hasard n'a jamais été acceptée par Einstein : le hasard en science, pensait-il, est l'entrée du diable dans un couvent !

Pour compléter un système, une méthode serait de choisir au hasard d'ajouter soit  $\mathcal{G}$ , soit la négation de  $\mathcal{G}$  ( $\mathcal{G}$  est l'indécidable de Gödel de  $\mathcal{S}$ , le système auquel on s'intéresse). Puis on recommencerait avec le nouveau système, etc. Les résultats de L. Levin montrent qu'une telle méthode ne marche pas.



tion de l'information qui s'appliquent en particulier aux algorithmes probabilistes.

Ensuite, L. Levin a établi que si un système d'axiomes complète celui de l'arithmétique – en ne laissant aucun trou – alors ce système porte nécessairement une information infinie sur la solution du problème de l'arrêt d'un programme. Ce problème de l'arrêt est la pierre de touche de la théorie de la calculabilité dont Alan Turing a démontré en 1936 qu'il était impossible à résoudre par algorithme (voir la figure 5).

La conjonction de ces résultats implique qu'un procédé probabiliste ou un processus physique ne créant pas d'information sur le problème de l'arrêt (ce qui est vraisemblablement le cas de tous ceux qu'on peut raisonnablement envisager) ne peut, sur la base de  $\mathcal{PA}$ , construire un système d'axiomes complet et consistant. Précisons cela.

La notion d'information utilisée dans le raisonnement de L. Levin est celle mesurée par la théorie de la complexité de Kolmogorov, aussi dénommée théorie algorithmique de l'information : le contenu en information d'un objet (ou complexité de Kolmogorov de l'objet) est, par définition, la taille mesurée en bits du plus petit programme capable d'engendrer l'objet. Ce plus petit programme doit être vu comme une version comprimée au maximum de l'objet, et c'est pourquoi on parle par-

## 5. Certaines informations sont spécifiques au monde mathématique

**E**n 1936, Alan Turing montre le premier qu'une suite peut être mathématiquement parfaitement définie et pourtant non calculable par algorithme.

Pour cela, il considère le problème de l'arrêt d'un programme (en fait, le problème de l'arrêt d'une machine de Turing, ce qui revient au même) : un programme étant donné, peut-on savoir si, une fois démarré, il finira par s'arrêter ou s'il tournera indéfiniment ?

La réponse est non : aucun programme ne peut, par analyse des programmes qu'on lui fournirait en données, indiquer sans jamais se tromper ceux qui s'arrêteront et ceux qui poursuivront sans fin leurs calculs.

Prenons l'ensemble (dénombrable) de tous les programmes. La suite  $S$  de '0' et de '1',  $S = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ , définie par :

$a_i = 1$  si le programme numéro  $i$  s'arrête,  
 $a_i = 0$  sinon,

est une suite non calculable par programme.

C'est le premier objet mathématique démontré non calculable. Depuis, beaucoup d'autres l'ont été.

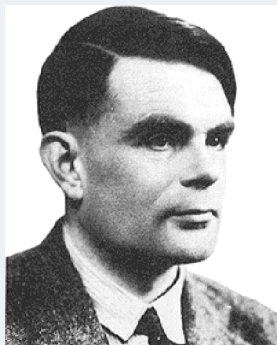
La suite  $S$  est au cœur du résultat principal de Leonid Levin. Il établit en effet que tout système d'axiomes qui serait une extension complète et non contradictoire du système de l'arith-

métique de Peano  $\mathcal{PA}$  posséderait une infinité d'informations en commun avec  $S$ . La suite  $S$  est une sorte de sésame devant la porte de la complétude : pour compléter un système, il faut bien connaître  $S$ .

Or, nous ne le pouvons pas : L. Levin montre qu'un algorithme probabiliste (utilisant des calculs et des tirages au sort) ne peut pas accéder à une information substantielle sur la suite  $S$  démontrée non calculable par Turing.

L. Levin postule ensuite un principe plus général : aucun procédé physique utilisant des calculs, des tirages au sort et aucun processus physique raisonnable ne peuvent accéder à une information substantielle concernant  $S$ .

Ce postulat d'indépendance entre processus physiques et informations mathématiques est une loi de conservation de l'information : certaines informations ne sont pas dans le monde physique et ne peuvent pas y être produites. Ce postulat, comparable aux lois de conservation de l'énergie, du moment cinétique, etc., énoncés classiquement en physique fixerait des limites définitives aux informations qu'on pourra extraire du monde physique. Il serait en quelque sorte la raison profonde du phénomène d'incomplétude qui concernerait non seulement les mathématiques, mais aussi la physique.



fois de contenu incompressible d'information. La théorie de l'information généralisée par L. Levin permet aussi de parler de la quantité d'information que possèdent en commun deux objets, et c'est en mesurant cette information mutuelle que L. Levin parvient à son résultat.

### Des mondes à part

La suite  $S$  (voir la figure 5) des résultats concernant l'arrêt de programmes joue un rôle central en informatique théorique et dans la démonstration de L. Levin. C'est un sésame indispensable et inaccessible pour atteindre la complétude. Cette suite  $S$  est un mot de passe qu'aucun calcul, ni tirage au sort, ne peut approcher, et dont l'ignorance interdit l'accès à tout système complet non contradictoire construit à partir de  $\mathcal{PA}$ . Un procédé physique ne créant pas d'information sur  $S$ , il n'y a pas d'espoir de compléter  $\mathcal{PA}$ .

Au-delà de cette compréhension profonde de l'impossibilité de compléter  $\mathcal{PA}$  par algorithmes probabilistes, L. Levin propose d'aller plus loin, au moins à titre de jeu spéculatif. Il défend l'idée que tout ce qui se passe dans le monde physique, même si cela ne se réduit pas à du calcul et des tirages au sort, est sujet aux lois de conservation de l'information : il est inconcevable d'après lui que le monde physique produise de l'information en quantité substantielle sur une suite comme  $S$  ou sur d'autres suites non calculables du même type.

Si l'on adopte ce postulat d'indépendance  $\mathcal{P}$  entre monde physique et monde mathématique, qui est une loi de conservation de l'information (analogue à la loi de conservation de l'énergie), on arrive à une forme renforcée et de nature physique du théorème d'incomplétude de Gödel : ce n'est plus seulement l'impossibilité de la complétion de  $\mathcal{PA}$  par un algorithme qui doit être affirmée, mais l'impossibilité de la

complétion de  $\mathcal{PA}$  par un processus physique quelconque.

Cette forme étonnante du théorème de Gödel, contrairement aux deux autres (la forme initiale de Gödel et celle concernant les algorithmes aléatoires), n'est pas démontrable, car il s'agit d'un énoncé physique reposant sur un principe de conservation, pas plus démontrable que les autres principes de conservation que l'on postule en physique. Avec, d'une part, le résultat mathématique prouvé sur les liens forts entre tout système complétant  $\mathcal{PA}$  et  $S$  et, d'autre part, la formulation du postulat d'indépendance comparable à une loi physique de conservation, une conception nouvelle des rapports entre mathématiques et physique est née.

Cette traduction de l'incomplétude logique proposée par L. Levin en un énoncé de physique aurait certainement réjoui Gödel : à Princeton, il aimait se promener longuement avec Einstein et il passa plusieurs années de sa vie à travailler sur les équations de la relativité générale. Même quand il ne le sait pas, le mathématicien ne travaille jamais uniquement pour lui : il fait aussi avancer la physique !

Jean-Paul DELAHAYE est professeur d'informatique à l'Univ. de Lille.

Gianbruno GUERRERIO, *Gödel, Logique à la folie*, in *Les génies de la Science*, n° 20, Belin/Pour la science, 2004.

Leonid LEVIN, *Forbidden information*, in *Proc. Annual IEEE Symp. on Foundations of Computer Science*, 2002.

<http://arXiv.org/abs/cs.CC/0203029>.

Jean-Paul DELAHAYE, *L'intelligence et le calcul. De Gödel aux ordinateurs quantiques*, Belin/Pour la Science, 2002.

Raymond SMULLYAN, *Les théorèmes d'incomplétude de Gödel*, Masson, Paris, 1993.

Kurt GÖDEL, *Collected Works*, Volume I (Publications 1929-1936), Oxford University Press, 1986.

