ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Том XIV 1978 Вып. 3

УДК 62-507:621.391.1

ОДНОМЕРНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ СРЕДЫ, РАЗМЫВАЮЩИЕ КОНЕЧНЫЕ ОСТРОВА

П. Гач, Г. Л. Курдюмов, Л. А. Левин

Рассматриваются одномерные однородные системы конечных автоматов с локальным взаимодействием как детерминированные, так и вероятностные. Состояние детерминированной системы называется притягивающим, если оно сохраняется во времени, а любое конечное отклонение от него исчезает за конечное время. Приводится три простых примера систем с неединственным однородным притягивающим состоянием. Приводятся результаты моделирования на ЭВМ вероятностных систем, полученных наложением случайного шума на эти системы. Результаты моделирования указывают, что в случае малого шума системы могут быть неэргодичны.

§ 1. Введение

Одномерная однородная случайная среда S (сокращенно среда) — это бесконечная в обе стороны однородная цепочка взаимодействующих конечных автоматов $\{s_i\}$. Она работает в дискретном времени $t=0, 1, \ldots$. Состояние автомата s_i в момент $t+1$ (обозначим его $\overset{t+1}{s_i}$; $\overset{t+1}{s_i}\in X$, где X — конечное множество возможных состояний автоматов s_i) зависит вероятностным образом от состояний конечного числа автоматов сети в момент t. Если состояния всех автоматов s_i^u во все моменты $u\leqslant t$ заданы, то состояния в момент $t+1$ условно независимы, а условные вероятности их определяются набором целых чисел $j_1, \ldots, j_k$ и матрицей φ (порядка $\underbrace{n\times n\times\ldots\times n}_{k+1}$, где n — мощность множества X):

$$P[\overset{t+1}{s_i}=y]=\varphi_y(\overset{t}{s}_{i+j_1}, \ldots, \overset{t}{s}_{i+j_k}).$$

Матрица φ естественным образом порождает оператор S_φ на пространстве всех вероятностных мер над множеством состояний среды Ω (где $\Omega=X^Z$, Z — множество всех целых чисел) (ср. [1]).

Мера μ называется *инвариантной*, если $S_\varphi\mu=\mu$; среда называется *эргодичной*, если она имеет ровно одну инвариантную меру. В настоящей заметке мы будем иметь дело прежде всего с детерминированными средами, т. е. такими, что $\varphi_y(x_1, \ldots, x)\in\{0, 1\}$. Такая среда описывается некоторой функцией $\lambda: X^k\to X$; $\lambda(x_1, \ldots, x_k)=y\leftrightarrow\varphi_y(x_1, \ldots, x_k)=1$. Пусть для $x\in\Omega$ $(S_\lambda x)_i=\lambda(x_{j+j_1}, \ldots, x_{i+j_k})$, тогда S_λ — функция перехода цепочки автоматов s_i. Будем говорить, что среда S_φ получена наложением шума уровня α на среду S_ψ (и писать $S_\varphi=S_\psi^{(\alpha)}$), если $\varphi=(1-\alpha)\psi+(\alpha/n)e$, где n — мощность X, e — единичная матрица. Состояния x, y детерминированной среды S_λ называются эквивалентными, если существует t, для которого $S_\lambda^t x=S_\lambda^t y$. Состояние x называется притягивающим, если ему эквивалентны все y, для которых множество $\{i\,|\,y_i\neq x_i\}$ конечно.

В работе [1] была высказана гипотеза о том, что всякая одномерная однородная среда с положительными вероятностями переходов эргодична.

В подтверждение этой гипотезы приводились результаты моделирования различных однородных сред на ЭВМ. Существенным доводом против этой гипотезы явился пример неэргодичной неоднородной (ни по пространству, ни по времени) случайной системы с положительными вероятностями переходов, предложенный Б. С. Цирельсоном в работе [2]. Результат этот был усилен Г. Л. Курдюмовым, что явилось опровержением обсуждаемой гипотезы. Итак, существует неэргодичная среда, у которой все вероятности переходов $\varphi_y(x_1, \ldots, x_k)$ положительны. Эта среда получается наложением малого шума на некоторую (весьма сложную) детерминированную среду S_*. Для S_* строятся два неэквивалентных притягивающих состояния x^1 и x^2. Они также весьма сложны, непериодичны и не сохраняются во времени. Исходя из x^1 и x^2, строятся инвариантные меры для соответствующей вероятностной среды.

Детерминированную среду мы назовем *консервативной*, если она имеет неэквивалентные периодические притягивающие состояния. Понятие консервативной среды, естественно, обобщается на случай размерности, большей 1. В работе [3] приводятся примеры многомерных консервативных сред. Там же установлена некоторая связь между консервативностью среды и неэргодичностью вероятностной среды, полученной из нее добавлением малого случайного шума, а в [4] построены примеры, когда эта связь нарушается. Задача нахождения простых консервативных сред возникла в связи с идеей отыскания неэргодичной одномерной среды с положительными вероятностями переходов, которая имела бы однородные по пространству инвариантные меры и была бы существенно проще среды, предложенной Г. Л. Курдюмовым. Первый вариант одномерной консервативной среды был предложен П. Гачем. Впоследствии на основе тех же идей Л. А. Левин предложил три простых среды S_{II}, S_{IV}, S_{VI}, о которых речь будет идти ниже*. Г. Л. Курдюмовым было проведено моделирование поведения этих сред на ЭВМ при наложении малого шума. Результаты машинного моделирования в ряде случаев дают основания предполагать неэргодичность.

§ 2. Простые консервативные среды

Перейдем к определению трех конкретных консервативных сред S_{II}, S_{IV} и S_{VI} с числом состояний 2, 4 и 6 соответственно. Функции λ_{II} и λ_{IV} будут определены только частично; значения их в остальных случаях доопределяются из соображений симметрии.

Итак, $X_{\text{II}}=\{\rightarrow, \leftarrow\}$. Функция λ_{II} перестановочна с операцией отражения: x_i переходит в x_{-i} при одновременной замене направления стрелок. Если $x_i=\leftarrow$, то направление стрелки $(S_{\text{II}}x)_i$ определяется голосованием: это будет направление, преобладающее среди стрелок x_i, x_{i+1}, x_{i+3}.

В среде S_{IV} больше состояний, но зависимость только от ближайших соседей. Имеем $X_{\text{IV}}=\{\rightarrow, \leftarrow, \uparrow, \downarrow\}$, $(S_{\text{IV}}x)_i=\lambda_{\text{IV}}(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$. Функция λ_{IV} перестановочна с операцией отражения ($x_i \rightarrow x_{-i}$ при одновременной замене правой и левой стрелок) и определяется соотношениями:

1. $\lambda_{\text{IV}}(\rightarrow, x, y)=\rightarrow$, если $x, y \neq \leftarrow$;
2. $\lambda_{\text{IV}}(x, \rightarrow, y)=\begin{cases}\downarrow & \text{при } x\in\{\leftarrow, \uparrow\},\\ \rightarrow & \text{в противном случае;}\end{cases}$
3. $\lambda_{\text{IV}}(x, y, z)=\uparrow$, если $y\in\{\downarrow, \uparrow\}$ и не имеет места случай 1.

Теорема. *Среды S_{II} и S_{IV} консервативны; состояния $x_i\equiv\rightarrow$ и $x_i\equiv\leftarrow$ являются для них притягивающими***.

* Некоторые варианты одномерных консервативных сред предлагались также М. Г. Шнирманом.

** Иных притягивающих состояний у S_{II} и S_{IV}, по-видимому, не существует.

Доказательство. Поведения сред S_{II} и S_{IV} аналогичны, если заметить, что зоны из не менее трех одинаковых стрелок в S_{II} соответствуют зонам из таких же стрелок в S_{IV}, а зоны из чередующихся стрелок — зонам из $\uparrow$ (с $\downarrow$ на концах). Поэтому доказательство, проведенное для S_{IV}, легко переводится на S_{II}. Пусть все, кроме конечного числа, знаки Ω суть $\leftarrow$. Пусть $L(x)$ — наименьшее, а $R(x)$ — наибольшее i, для которого $x_i=\leftarrow$. Отрезок $(L(x), R(x))$ мы будем называть островом (ср. [3]). Покажем, что если $n=R(x^0)-L(x^0)$, то $S_{IV}{}^{6n}x^0$ состоит уже только из $\leftarrow$. Пусть $M(x)$ — наименьшее i, для которого $x_i=\rightarrow$ (если такое существует). По определению, легко проверить, что: 1) $R(S_{IV}x)\leqslant R(x)$; 2) $L(S_{IV}{}^2x)\geqslant L(x)-1$, следовательно, левый край острова не может двигаться влево со скоростью, большей 1/2; 3) $M(S_{IV}{}^2x)>M(x)$, если $M(S_{IV}{}^2x)$ существует, поэтому не позднее $2n$-го шага знаки $\rightarrow$ исчезнут из x; 4) если знаков $\rightarrow$ в x нет, то $R(S_{IV}x)<R(x)$. Поэтому остров, имеющий теперь размер не больше $2n$, исчезнет за дальнейшие $4n$ шагов, что и требовалось доказать.

Мы определим еще один вариант консервативной среды с шестью состояниями, $X_{VI}=\{+, -, \rightarrow, \leftarrow, \nrightarrow, \nleftarrow\}$. Функция λ_{VI} перестановочна с операцией, меняющей знаки $+$ и $-$ и направление стрелок, а также с операцией отражения (меняющей направление стрелок и переводящей x_i в x_{-i}). Каждое из следующих равенств выполняется, если значение λ_{VI} не вытекает из предыдущих:

1. $\lambda_{VI}(x, y, x)=x$; 2. $\lambda_{VI}(+, x, -)=\nleftarrow$
3. $\lambda_{VI}(x, \nrightarrow, y)=\rightarrow$; 4. $\lambda_{VI}(\leftarrow, x, \rightarrow)=+$;
5. $\lambda_{VI}(+, \rightarrow, x)=+$; 6. $\lambda_{VI}(\rightarrow, +, x)=\nrightarrow$;

Для S_{VI} состояния $x_i\equiv+$ и $x_i\equiv-$ являются притягивающими.

§ 3. Эксперименты

Результаты моделирования на ЭВМ некоторых однородных сред с целью выяснения вопроса об их эргодичности приводятся в работе [5].

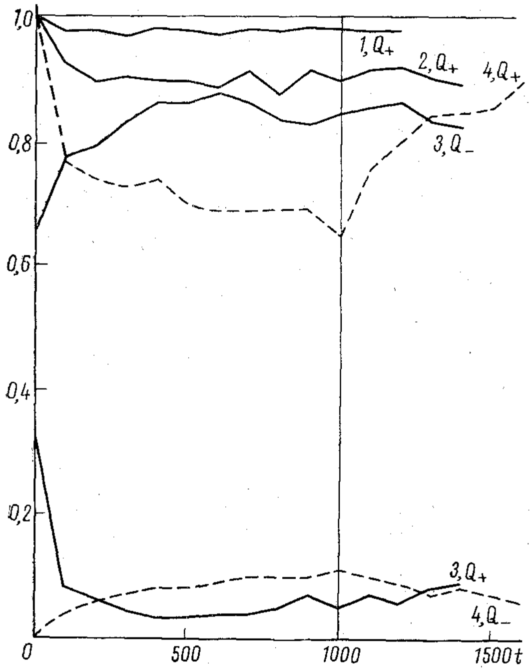
Ниже приводятся результаты моделирования сред $S_{VI}^{(\alpha)}$, $S_{IV}^{(\alpha)}$ и $S_{II}^{(\alpha)}$. Рассматривался конечный отрезок среды (длины 2000—5000 автоматов), замкнутый в кольцо (во избежание каких-либо граничных эффектов) и работающий в течение 1000—2000 тактов времени. Использовались псевдослучайные числа, порожденные одним из стандартных алгоритмов. На печать выводились доли Q_x автоматов в тех или иных состояниях x по

Среды $S_{VI}^{(\alpha)}$

№ опыта	Длина кольца	Начальное состояние	Значение α
1	5000	$Q_+=1$	0,01
2	2000	$Q_+=1$	0,03
3	2000	$Q_+=1/3$; $Q_-=2/3$	0,03
4	5000	$Q_+=1$	$\alpha=0{,}05$ при $t\leqslant1000$
5			$\alpha=0{,}01$ при $t>1000$

истечении определенных интервалов времени. Наиболее детально изучались среды $S_{VI}^{(\alpha)}$. На рисунке приведены графики зависимости от времени Q_+ и Q_- в четырех различных опытах. Разным опытам соответствуют разные значения длины кольца, шума (α) и разные начальные состояния (см. таблицу). Поскольку среда S_{VI} симметрична относительно замены $+$

и —, в случае эргодичности $S_{\text{VI}}^{(\alpha)}$ пределы Q_+ и Q_- должны быть равны. При моделировании же должно наблюдаться их сближение. В опытах 1 и 2 при начальном состоянии $x_i \equiv +$ величина Q_+, начиная примерно с $t=200$, только случайно колеблется вблизи определенного значения (существенно большего 0,5). Во все моменты, кратные 100, $Q_+ > 0{,}85$. В опыте 3 в каче-



Доля автоматов Q_+ (Q_-), находящихся в состоянии + (−), в зависимости от времени t

стве начального состояния взята случайная последовательность из + и — с вероятностью —, равной 2/3. В этом случае к моменту $t=300$ величина Q_- резко увеличивается, и затем не наблюдается меньше 0,8. Обратим, однако, внимание на то, что в этом опыте Q_- всегда оказывается меньше, чем Q_+ в опыте 2. В опыте 4 начальное состояние было $x_i \equiv +$, значение α до $t=1000$ было равно 0,05, а затем заменено на 0,01. На интервале $0 \leqslant t \leqslant 1000$ Q_+ имела явную тенденцию к уменьшению; это можно рассматривать как довод в пользу эргодичности $S_{\text{VI}}^{(0,05)}$. Но резкое увеличение Q_+ после $t=1000$ есть дополнительный довод в пользу неэргодичности $S_{\text{VI}}^{(0,01)}$. Моделировалась также среда $S_{\text{VI}}^{(0,15)}$ при начале с $x_i \equiv +$, однако уже при $t=100$ Q_+ и Q_- почти сравнялись и в дальнейшем их графики многократно пересекались. Результаты этого опыта дают все основания предполагать эргодичность $S_{\text{VI}}^{(0,15)}$. Итак, по результатам моделирования можно предположить, что среда $S_{\text{VI}}^{(\alpha)}$ эргодична при $\alpha \geqslant 0{,}05$, но неэргодична при $\alpha \leqslant 0{,}03$.

Весьма естественным кажется предположение, что эргодичность сред типа $S_{\text{VI}}^{(\alpha)}$ может быть обусловлена случайным рождением крупных островов. В связи с этим в одном из опытов с $S_{\text{VI}}^{(0,03)}$ было взято начальное состояние $x_i = -$ при $10 \leqslant i \leqslant 100$ и $x_i = +$ при остальных i. Остров перестал быть «монолитным», границы его случайно блуждали, однако до $t=1000$ размеры его существенно не изменились.

Существенно большую устойчивость к шуму обнаруживают среды S_{II} и S_{IV}. При моделировании $S_{IV}^{(0,05)}$ из начального состояния $x_i \equiv \rightarrow$ при $t \leqslant 2000$ значения $Q_{\rightarrow}$ не наблюдались ниже 0,78, а систематическое их уменьшение прекратилось уже с $t=100$. При моделировании $S_{II}^{(0,2)}$ за первые 420 тактов был полностью уничтожен остров длины 100, а значения $Q_{\rightarrow}$ не наблюдались ниже 0,66.

В заключение отметим, что, несмотря на результаты моделирования, вывод о неэргодичности сред $S_{II}^{(\alpha)}, S_{IV}^{(\alpha)}$ и $S_{VI}^{(\alpha)}$ при малых α не представляется вполне убедительным. Авторы допускают возможность, что все эти среды эргодичны; особенно реальной представляется их эргодичность в случае, когда шум несимметричен (т. е., например, вероятность случайного перехода в состояние $\rightarrow$ для S_{II} больше соответствующей вероятности для состояния $\leftarrow$). Тем не менее, если сходимость к единственной инвариантной мере и имеет место, то мы имеем дело с очень медленной сходимостью. Такая «квазинеэргодичность» может представлять самостоятельный интерес.

Авторы глубоко признательны А. Л. Тоому за внимание к работе и ряд ценных замечаний, а также А. В. Смирновой за существенную помощь в работе на ЭВМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Васильев Н. Б., Добрушин Р. Л., Пятецкий-Шапиро И. И.* Марковские процессы на бесконечном произведении дискретных пространств. Советско-японский симпоз. по теории вероятностей. Новосибирск, 1969, 3–30.
2. *Цирельсон Б. С.* Надежное хранение информации в системе локально взаимодействующих ненадежных элементов. Сб. «Взаимодействующие марковские процессы в биологии». Пущино, 1977, 24–37.
3. *Тоом А. Л.* Устойчивые и притягивающие траектории в многокомпонентных системах. Сб. «Многокомпонентные случайные системы». М., «Наука», 1977, 288–308.
4. *Тоом А. Л.* Неустойчивые многокомпонентные системы. Проблемы передачи информации, 1976, 12, *3*, 78–84.
5. *Васильев Н. Б., Петровская М. Б., Пятецкий-Шапиро И. И.* Моделирование голосования со случайной ошибкой. Автоматика и телемеханика, 1969, *10*, 103–107.

Поступила в редакцию
8 сентября 1977 г.